Ranking y valores para juegos de equipo

L. Hernández-Lamoneda y F. Sánchez-Sánchez

Mayo 23, 2008

Ranking de Poder

-

Definition

Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones o índices. Diremos que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ dan el mismo ranking (PIR) si y sólo si para todo juego v, y cualesquiera dos jugadores i, j,

$$\phi_i(v) > \phi_j(v) \text{si y sólo si } \psi_i(v) > \psi_j(v).$$

Escribiremos $\phi \overset{\text{PIR}}{=} \psi$ para indicar que las dos soluciones tienen el mismo PIR.

-

Definición

Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos índices. Diremos que ϕ y ψ **difieren en a lo más una constante** *si existe una función $k : G \to \mathbb{R}$ tal que, para todo juego v, y todo jugador i*

Ranking de Poder

- Definition
  Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones o índices. Diremos que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ dan el mismo ranking (PIR) si y sólo si para todo juego v, y cualesquiera dos jugadores i, j,

$$\phi_i(v) > \phi_j(v) \text{si y sólo si } \psi_i(v) > \psi_j(v).$$

  Escribiremos $\phi \overset{\text{PIR}}{=} \psi$ para indicar que las dos soluciones tienen el mismo PIR.

  -

Definición

Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos índices. Diremos que ϕ y ψ **difieren en a lo más una constante** *si existe una función $k : G \to \mathbb{R}$ tal que, para todo juego v, y todo jugador i*

$$\phi_i(v) - \psi_i(v) = k(v).$$

Ranking de Poder

- Definition
  Sean $\phi, \psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones o índices. Diremos que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ dan el mismo ranking (PIR) si y sólo si para todo juego v, y cualesquiera dos jugadores i, j,

  $$\phi_i(v) > \phi_j(v) \text{si y sólo si } \psi_i(v) > \psi_j(v).$$

  Escribiremos $\phi \overset{\text{PIR}}{=} \psi$ para indicar que las dos soluciones tienen el mismo PIR.

  -

Definición

Sean $\phi, \psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos índices. Diremos que ϕ y ψ **difieren en a lo más una constante** *si existe una función $k : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo juego v, y todo jugador i*

$$\phi_i(v) - \psi_i(v) = k(v).$$

Ranking de Poder

- Definition
  Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones o índices. Diremos que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ dan el mismo ranking (PIR) si y sólo si para todo juego v, y cualesquiera dos jugadores i, j,

  $$\phi_i(v) > \phi_j(v) \text{si y sólo si } \psi_i(v) > \psi_j(v).$$

  Escribiremos $\phi \overset{\text{PIR}}{=} \psi$ para indicar que las dos soluciones tienen el mismo PIR.

- Definición
  Sean $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}^n$ dos índices. Diremos que ϕ y ψ **difieren en a lo más una constante** *si existe una función $k : G \to \mathbb{R}$ tal que, para todo juego v, y todo jugador i*

  $$\phi_i(v) - \psi_i(v) = k(v).$$

Ranking de Poder

- **Teorema**

  Sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal simétrica arbitraria. Entonces existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica y eficiente que difieren en a lo más en una constante con ψ.

- **Corollary**

  Existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica, eficiente y que difiere en a lo más en una constante con el valor de Banzhaf B. Además, ésta está dada por,

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \ni i} (n-s)\left[v(S) - v(N \setminus S)\right]$$

Ranking de Poder

- Teorema
  Sea $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución lineal simétrica arbitraria. Entonces existe una única solución $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica y eficiente que difieren en a lo más en una constante con ψ.

  -

  Corollary
  Existe una única solución $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica, eficiente y que difiere en a lo más en una constante con el valor de Banzhaf B. Además, ésta está dada por,

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \ni i} (n-s)\left[v(S) - v(N \setminus S)\right]$$

  - Esta solución es el prenucleolo de mínimos cuadrados considerada en

Ranking de Poder

- Teorema
  Sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal simétrica arbitraria. Entonces existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica y eficiente que difieren en a lo más en una constante con ψ.

  -

  Corollary
  Existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica, eficiente y que difiere en a lo más en una constante con el valor de Banzhaf B. Además, ésta está dada por,

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \ni i} (n-s)\left[v(S) - v(N \setminus S)\right]$$

  - Esta solución es el prenucleolo de mínimos cuadrados considerada en

Ranking de Poder

- Teorema
  Sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal simétrica arbitraria. Entonces existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica y eficiente que difieren en a lo más en una constante con ψ.

- Corollary
  Existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica, eficiente y que difiere en a lo más en una constante con el valor de Banzhaf B. Además, ésta está dada por,

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \ni i} (n-s)\left[v(S) - v(N \setminus S)\right]$$

  - Esta solución es el prenucleolo de mínimos cuadrados considerada en Ruiz et al. (1996)).

Ranking de Poder

- Teorema
  Sea $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ una solución lineal simétrica arbitraria. Entonces existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica y eficiente que difieren en a lo más en una constante con ψ.

- Corollary
  Existe una única solución $\phi : G \to \mathbb{R}^n$ la cual es lineal, simétrica, eficiente y que difiere en a lo más en una constante con el valor de Banzhaf B. Además, ésta está dada por,

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \ni i} (n-s)\,[v(S) - v(N \setminus S)]$$

  - Esta solución es el prenucleolo de mínimos cuadrados considerada en Ruiz et al. (1996)).

Ranking de Poder

Corollary

Sea

$$\psi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} r_s \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]$$

una solución arbitraria lineal, simétrica que satisface nulidad entonces, la única solución lineal, simétrica eficiente con el mismo PIR que ψ *está dada por*

$$\phi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i} (n-s) \left[t_s v(S) - t_{n-s} v(N \setminus S)\right]$$

donde

$$t_s = \frac{r_{s-1} + r_s}{n}.$$

Ranking de Poder

Teorema

Sean ϕ *y* ψ *dos índices lineales simétricos. Entonces* $\phi \overset{PIR}{=} \psi$ *implica que existe* $\lambda > 0$ *tal que* $\phi \overset{uptok}{=} \lambda\psi$*. El recíproco también es cierto.*

En otras palabras, dos índices lineales simétricos, ϕ *y* ψ*, ordenan a todos los jugadores, en todos los juegos, en el mismo orden, si y sólo si existe una función* $k : G \to \mathbb{R}^n$ *y una constante positiva* λ*, tal que*

$$\phi_i(v) = \lambda\psi_i(v) + k(v)$$

para todo v *y todo* i*.*

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n,$ sea

$$G_s = \{v \in G \mid \ v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

a los elementos de G_s los llamamos "juegos de equipo" con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n,$ sea

$$G_s = \{v \in G \mid \; v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

  a los elementos de G_s los llamamos "juegos de equipo" con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n$, sea

$$G_s = \{v \in G \mid \; v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

  a los elementos de G_s los llamamos "juegos de equipo" con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n$, sea

$$G_s = \{v \in G \mid \ v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

  a los elementos de G_s los llamamos "juegos de equipo" con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n,$ sea

$$G_s = \{v \in G \mid \; v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

  a los elementos de G_s los llamamos “juegos de equipo” con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- Para toda $s : 1, \ldots, n$, sea

$$G_s = \{v \in G \mid \; v(S) = 0 \text{ if } |S| \neq s\},$$

  a los elementos de G_s los llamamos "juegos de equipo" con s jugadores.

- **Ejemplo del basketball**
  - N conjunto de jugadores de la NBA.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ estimación de la calidad del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los jugadores.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.

- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.

- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \ldots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

Juegos de Equipo

- **Ejemplo del Poker**
  - $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de cartas.
  - $s = 5$.
  - $v(S)$ valor de la mano S de poker.
  - $I_0(v)$ valor de las cartas en el poker.
- **Ejemplo del remo**
  - $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de remeros de un país.
  - $s = 2$.
  - $v(S)$ mejor tiempo del equipo S.
  - $I_0(v)$ ranking de los remeros.

PIR para juegos de equipo

- Sea $I : G_s \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$I_i(v) = \frac{1}{\binom{n-2}{s-1}} \sum_{S \ni i} v(S).$$

  I es una solución lineal simétrica. Además, $\frac{1}{n-1} I$ difiere en a lo más en una constante con la restricción del valor de Shapley a G_s.

-

Teorema

Sea $\phi : G_s \rightarrow \mathbb{R}^n$ un índice lineal simétrico, entonces ϕ tiene el mismo PIR que εI_0 donde $\varepsilon = -1, 0$ o 1.

-

Remark

Todo juego de equipo $v \in G_s$ tiene asociado en forma natural un único (salvo por el signo) índice de poder para sus jugadores.

PIR para juegos de equipo

- Sea $I : G_s \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$I_i(v) = \frac{1}{\binom{n-2}{s-1}} \sum_{S \ni i} v(S).$$

  I es una solución lineal simétrica. Además, $\frac{1}{n-1} I$ difiere en a lo más en una constante con la restricción del valor de Shapley a G_s.

-

Teorema

Sea $\phi : G_s \to \mathbb{R}^n$ un índice lineal simétrico, entonces ϕ tiene el mismo PIR que εI_0 donde $\varepsilon = -1, 0$ o 1.

-

Remark

Todo juego de equipo $v \in G_s$ tiene asociado en forma natural un único (salvo por el signo) índice de poder para sus jugadores.

PIR para juegos de equipo

- Sea $I : G_s \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$I_i(v) = \frac{1}{\binom{n-2}{s-1}} \sum_{S \ni i} v(S).$$

I es una solución lineal simétrica. Además, $\frac{1}{n-1} I$ difiere en a lo más en una constante con la restricción del valor de Shapley a G_s.

- Teorema
Sea $\phi : G_s \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un índice lineal simétrico, entonces ϕ tiene el mismo PIR que εI_0 donde $\varepsilon = -1, 0$ o 1.

- Remark
Todo juego de equipo $v \in G_s$ tiene asociado en forma natural un único (salvo por el signo) índice de poder para sus jugadores.

PIR para juegos de equipo

- Sea $I : G_s \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$I_i(v) = \frac{1}{\begin{pmatrix} n-2 \\ s-1 \end{pmatrix}} \sum_{S \ni i} v(S).$$

  I es una solución lineal simétrica. Además, $\frac{1}{n-1} I$ difiere en a lo más en una constante con la restricción del valor de Shapley a G_s.

- Teorema
  Sea $\phi : G_s \rightarrow \mathbb{R}^n$ un índice lineal simétrico, entonces ϕ tiene el mismo PIR que εI_0 donde $\varepsilon = -1, 0$ o 1.
  -

Remark
Todo juego de equipo $v \in G_s$ tiene asociado en forma natural un único (salvo por el signo) índice de poder para sus jugadores.

PIR para juegos de equipo

- Sea $I : G_s \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$I_i(v) = \frac{1}{\binom{n-2}{s-1}} \sum_{S \ni i} v(S).$$

  I es una solución lineal simétrica. Además, $\frac{1}{n-1} I$ difiere en a lo más en una constante con la restricción del valor de Shapley a G_s.

- Teorema
  Sea $\phi : G_s \to \mathbb{R}^n$ un índice lineal simétrico, entonces ϕ tiene el mismo PIR que εI_0 donde $\varepsilon = -1, 0$ o 1.

- Remark
  Todo juego de equipo $v \in G_s$ tiene asociado en forma natural un único (salvo por el signo) índice de poder para sus jugadores.

PIR para juegos de equipo

The Poker example (cont.): Para un juego de poker $v \in G_5^{52}$, el índice $I : G_5^{52} \to \mathbb{R}^{52}$ da el índice de las cartas. Como suponemos que todos los palos tienen el mismo valor, podemos pensar que I toma valores en $\mathbb{R}^{13}$. El ranking de las cartas es:

j	$I_j(v)$
A	0.236088
K	0.128311
Q	0.066628
J	0.029374
10	0.005330
9	-0.012679
8	-0.027257
7	-0.040026
6	-0.051830
5	-0.063794
4	-0.076991

Retirando jugadores del juego

- Sea $v \in G_s^N$ un juego arbitrario, entonces si el jugador n abandona el juego obtenemos el juego $Rv \in G_s^{N\setminus\{n\}}$ al restringirlo: para $S \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sea $Rv(S) := v(S)$.
- La fórmula para calcular el PIR de $v \in G_s^N$,

$$I_j(v) = \frac{1}{\binom{n-2}{s-1}} \sum_{S \ni j} v(S),$$

para $j \in N$.

Retirando jugadores del juego

- Sea $v \in G_s^N$ un juego arbitrario, entonces si el jugador n abandona el juego obtenemos el juego $Rv \in G_s^{N\setminus\{n\}}$ al restringirlo: para $S \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sea $Rv(S) := v(S)$.

- La fórmula para calcular el PIR de $v \in G_s^N$,

$$I_j(v) = \frac{1}{\begin{pmatrix} n-2 \\ s-1 \end{pmatrix}} \sum_{S \ni j} v(S),$$

para $j \in N$.

Retirando jugadores del juego

- Mientras que para $Rv \in G^{N\setminus\{n\}}$, suponiendo que salen los jugadores $P \subset N$.

$$I_j^{N\setminus P}(Rv) = \frac{1}{\binom{n-p-2}{s-1}} \sum_{\substack{S \ni j \\ S \subset N \setminus P}} v(S),$$

para $j \in N \setminus P$.

-

Teorema

Fijo un jugador $k \in N$. Sea $u \in \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^{N\setminus\{k\}}$ vectores arbitrarios. Si $2 \leq s \leq n-2$, entonces existe un juego de equipo $v \in G_s^N$ tal que:

- *el ranking de los jugadores para v esta dado por el vector u; y*
- *si el jugador k abandona el juego, entonces el ranking para el juego restringido, Rv, a $N \setminus \{k\}$ está dado por x.*

Retirando jugadores del juego

- Mientras que para $Rv \in G^{N\setminus\{n\}}$, suponiendo que salen los jugadores $P \subset N$.

$$I_j^{N\setminus P}(Rv) = \frac{1}{\binom{n-p-2}{s-1}} \sum_{\substack{S \ni j \\ S \subset N \setminus P}} v(S),$$

para $j \in N \setminus P$.

-

Teorema
Fijo un jugador $k \in N$. Sea $u \in \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^{N\setminus\{k\}}$ vectores arbitrarios. Si $2 \leq s \leq n-2$, entonces existe un juego de equipo $v \in G_s^N$ tal que:

- *el ranking de los jugadores para v esta dado por el vector u; y*
- *si el jugador k abandona el juego, entonces el ranking para el juego restringido, Rv, a $N \setminus \{k\}$ está dado por x.*

Retirando jugadores del juego

- Mientras que para $Rv \in G^{N\setminus\{n\}}$, suponiendo que salen los jugadores $P \subset N$.

$$I_j^{N\setminus P}(Rv) = \frac{1}{\binom{n-p-2}{s-1}} \sum_{\substack{S \ni j \\ S \subset N \setminus P}} v(S),$$

para $j \in N \setminus P$.

- Teorema
Fijo un jugador $k \in N$. Sea $u \in \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^{N\setminus\{k\}}$ vectores arbitrarios. Si $2 \leq s \leq n-2$, entonces existe un juego de equipo $v \in G_s^N$ tal que:
    - *el ranking de los jugadores para v esta dado por el vector u; y*
    - *si el jugador k abandona el juego, entonces el ranking para el juego restringido, Rv, a $N \setminus \{k\}$ está dado por x.*

Retirando jugadores del juego

- Mientras que para $Rv \in G^{N\setminus\{n\}}$, suponiendo que salen los jugadores $P \subset N$.

$$I_j^{N\setminus P}(Rv) = \frac{1}{\binom{n-p-2}{s-1}} \sum_{\substack{S \ni j \\ S \subset N \setminus P}} v(S),$$

  para $j \in N \setminus P$.

- Teorema
  Fijo un jugador $k \in N$. Sea $u \in \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^{N\setminus\{k\}}$ vectores arbitrarios. Si $2 \leq s \leq n-2$, entonces existe un juego de equipo $v \in G_s^N$ tal que:
  - *el ranking de los jugadores para v esta dado por el vector u; y*
  - *si el jugador k abandona el juego, entonces el ranking para el juego restringido, Rv, a $N \setminus \{k\}$ está dado por x.*

Retirando jugadores del juego

- Mientras que para $Rv \in G^{N\setminus\{n\}}$, suponiendo que salen los jugadores $P \subset N$.

$$I_j^{N\setminus P}(Rv) = \frac{1}{\binom{n-p-2}{s-1}} \sum_{\substack{S \ni j \\ S \subset N \setminus P}} v(S),$$

  para $j \in N \setminus P$.

- Teorema
  Fijo un jugador $k \in N$. Sea $u \in \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^{N\setminus\{k\}}$ vectores arbitrarios. Si $2 \leq s \leq n-2$, entonces existe un juego de equipo $v \in G_s^N$ tal que:
  - *el ranking de los jugadores para v esta dado por el vector u; y*
  - *si el jugador k abandona el juego, entonces el ranking para el juego restringido, Rv, a $N \setminus \{k\}$ está dado por x.*

Retirando jugadores del juego

Ejemplo del remo (continua)

Supongamos los siguientes tiempos para cada par de remeros:

$v(\{1,5\}) =$	6.26
$v(\{2,5\}) =$	6.46
$v(\{3,5\}) =$	6.66
$v(\{4,5\}) =$	6.86
$v(\{1,2\}) =$	6.54
$v(\{1,3\}) =$	6.5
$v(\{1,4\}) =$	6.46
$v(\{2,3\}) =$	6.46
$v(\{2,4\}) =$	6.42
$v(\{3,4\}) =$	6.38

Retirando jugadores del juego

Entonces,

$$I(v) = \frac{1}{3}(25{,}76, 25{,}88, 26, 26{,}12, 26{,}24),$$

de donde,

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5$$

lo cual significa que el equipo olímpico debe constituirse con los remeros $\{1, 2, 3\}$ en ese orden.

Si $k = 5$ abandona, entonces

$$I(Rv) = \frac{1}{2}(19{,}5, 19{,}42, 19{,}34, 19{,}26).$$

Así el nuevo ranking es $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$. Y de esta forma, el nuevo equipo olímpicoo debe tener a los remeros $\{4, 3, 2\}$ en ese orden.

Retirando jugadores del juego

- Para un juegos de equipo $v \in G_s$, definimos el juego de equipo $Fv \in G_{s-1}^{N\setminus\{n\}}$ por
$$Fv(T) = v(T \cup \{n\})$$
para todo $T \subseteq N \setminus \{n\}$. Fv es un juego donde el jugador n participa en toda coalición sin estar registrado"; $Rv \in G_s^{N\setminus\{n\}}$, como antes, es el juego restringido. Entonces,

-

Teorema

$$(n-2)I^N(v) = (n-s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Rv) + (s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Fv).$$

Retirando jugadores del juego

- Para un juegos de equipo $v \in G_s$, definimos el juego de equipo $Fv \in G_{s-1}^{N\setminus\{n\}}$ por
$$Fv(T) = v(T \cup \{n\})$$
para todo $T \subseteq N \setminus \{n\}$. Fv es un juego donde el jugador n participa en toda coalición sin estar registrado"; $Rv \in G_s^{N\setminus\{n\}}$, como antes, es el juego restringido. Entonces,
-

Teorema

$$(n-2)I^N(v) = (n-s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Rv) + (s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Fv).$$

Retirando jugadores del juego

- Para un juegos de equipo $v \in G_s$, definimos el juego de equipo $Fv \in G_{s-1}^{N\setminus\{n\}}$ por
$$Fv(T) = v(T \cup \{n\})$$
para todo $T \subseteq N \setminus \{n\}$. Fv es un juego donde el jugador n participa en toda coalición sin estar registrado"; $Rv \in G_s^{N\setminus\{n\}}$, como antes, es el juego restringido. Entonces,
-

Teorema

$$(n-2)I^N(v) = (n-s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Rv) + (s-1)I^{N\setminus\{n\}}(Fv).$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- En esta sección estudiamos juegos $(v, c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$ y soluciones
$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
que son lineales simétricas. Sea $1 \leq s < n$.
-

Definición
Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$ definimos
$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

-

Teorema
El espacio de soluciones lineales simétricas $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de dimensión 3. Más aún, su expresión general está dada por

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- En esta sección estudiamos juegos $(v, c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$ y soluciones

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

que son lineales simétricas. Sea $1 \leq s < n$.

- **Definición**

Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$ definimos

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

- **Teorema**

El espacio de soluciones lineales simétricas $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de dimensión 3. Más aún, su expresión general está dada por

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- En esta sección estudiamos juegos $(v, c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$ y soluciones

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

que son lineales simétricas. Sea $1 \leq s < n$.

- Definición

Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$ definimos

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

-

Teorema

El espacio de soluciones lineales simétricas $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de dimensión 3. Más aún, su expresión general está dada por

$$\phi_i(v, c) = Ac + B \sum v(S) - C \sum v(S)$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- En esta sección estudiamos juegos $(v, c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$ y soluciones

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

que son lineales simétricas. Sea $1 \leq s < n$.

- Definición

Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$ definimos

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

-

Teorema

El espacio de soluciones lineales simétricas $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de dimensión 3. Más aún, su expresión general está dada por

$$\phi_i(v, c) = Ac + B \sum v(S) - C \sum v(S)$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- En esta sección estudiamos juegos $(v, c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$ y soluciones
$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
que son lineales simétricas. Sea $1 \leq s < n$.

- Definición
Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$ definimos
$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i.$$

- Teorema
El espacio de soluciones lineales simétricas $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es de dimensión 3. Más aún, su expresión general está dada por
$$\phi_i(v, c) = Ac + B \sum_{S \ni i} v(S) - C \sum_{S \not\ni i} v(S)$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

-

Definición

(Axioma de eficiencia) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice eficiente si

$$\phi(v, c) \cdot 1_n = c.$$

-

Teorema

El espacio de soluciones lineales simétricas y eficientes

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

es de dimensión 1. Su expresión general esta dada por

$$\phi_i(v, c) = \frac{c}{n} + \lambda \left[\sum_{S \ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \frac{v(S)}{n-s} \right]$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición
  (Axioma de eficiencia) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice eficiente si

$$\phi(v, c) \cdot \ 1_n = c.$$

- Teorema
  El espacio de soluciones lineales simétricas y eficientes

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

  es de dimensión 1. Su expresión general esta dada por

$$\phi_i(v, c) = \frac{c}{n} + \lambda \left[\sum_{S \ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \frac{v(S)}{n - s} \right]$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición
  (Axioma de eficiencia) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice eficiente si

$$\phi(v, c) \cdot \ 1_n = c.$$

  - Teorema
  El espacio de soluciones lineales simétricas y eficientes

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

es de dimensión 1. Su expresión general esta dada por

$$\phi_i(v, c) = \frac{c}{n} + \lambda \left[\sum_{S \ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \frac{v(S)}{n - s} \right]$$

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición
  (Axioma de eficiencia) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice eficiente si

$$\phi(v,c) \cdot \ 1_n = c.$$

- Teorema
  El espacio de soluciones lineales simétricas y eficientes

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

es de dimensión 1. Su expresión general esta dada por

$$\phi_i(v,c) = \frac{c}{n} + \lambda \left[\sum_{S \ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \frac{v(S)}{n-s} \right]$$

para cada $(v,c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$, $i : 1, \ldots, n$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- **Definición**

  Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un entero $s : 1, \ldots, n$ definimos un juego, x^s, como sigue:

  $$x^s(S) = \begin{cases} \hat{x}(S) & if\ |S| = s; \\ 0 & if\ |S| \neq s. \end{cases}$$

  Nótese que $\hat{x} = \sum_{s=1}^{n} x^s$.

- **Definición**

  (Axioma de Naturalidad) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice natural si

  $$\phi(x^s, x \cdot 1_n) = x.$$

  para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición
  Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un entero $s : 1, \dots, n$ definimos un juego, x^s, como sigue:

$$x^s(S) = \begin{cases} \hat{x}(S) & \textit{if } |S| = s; \\ 0 & \textit{if } |S| \neq s. \end{cases}$$

  Nótese que $\hat{x} = \sum_{s=1}^{n} x^s$.

- Definición
  (Axioma de Naturalidad) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice natural si

$$\phi(x^s, x \cdot 1_n) = x.$$

  para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición
  Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un entero $s : 1, \ldots, n$ definimos un juego, x^s, como sigue:
  $$x^s(S) = \begin{cases} \hat{x}(S) & \text{if } |S| = s; \\ 0 & \text{if } |S| \neq s. \end{cases}$$
  Nótese que $\hat{x} = \sum_{s=1}^{n} x^s$.

- Definición
  (Axioma de Naturalidad) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice natural si
  $$\phi(x^s, x \cdot 1_n) = x.$$
  para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

- Definición

  Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un entero $s : 1, \ldots, n$ definimos un juego, x^s, como sigue:

$$x^s(S) = \begin{cases} \hat{x}(S) & \text{if } |S| = s; \\ 0 & \text{if } |S| \neq s. \end{cases}$$

  Nótese que $\hat{x} = \sum_{s=1}^{n} x^s$.

- Definición

  (Axioma de Naturalidad) La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se dice natural si

$$\phi(x^s, x \cdot 1_n) = x.$$

  para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

Teorema

El espacio de soluciones lineales simétricas y naturales

$$\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es de dimensión 1. Su expresión general está dada por

$$\phi(x^s + w, c) = \left[\alpha \frac{x(N)}{n} + \frac{1-\alpha}{n} c\right] \ 1_n + (x - \frac{x(N)}{n} \ 1_n) = x + \frac{(1-\alpha)}{n}(c - x \cdot \ 1_n) \ 1$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

Teorema

Existe una única solución $\psi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *la cual es lineal, simétrica, eficiente y natural. Esta está dada por*

$$\psi_i(v,c) = \frac{c}{n} + \frac{n-1}{\binom{n}{s}} \left[\sum_{S \ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S \not\ni i} \frac{v(S)}{n-s} \right]$$

para todo $(v,c) \in G_s \oplus \mathbb{R}$, $i : 1, \ldots, n$.

Juegos en $G_s \oplus \mathbb{R}$

Ejemplo del Europass.

- Se eligen s países europeos (donde $s = 3, 4$ o 5) de un conjunto N.
- $v(S)$ número de viajeros que selecciona a $S \subseteq N$, para viajar d días en los países de S.
- c es el monto total recolectado en la venta de Europass.
- La solución $\phi : G_s \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ asigna a (v, c) un vector $\phi(v, c)$ donde $\phi_j(v, c)$ es el monto que le corresponde al país j.

Problema de bancarrota

- Recordemos que G_1 consiste de los juegos que sólo pueden tener valores difentes de cero en coaliciones de cardinalidad uno. Así, es natural identidarlo con $\mathbb{R}^n$: $x(\{i\}) = x_i$.

- **Definición**
  Un juego de bancarrota es un elemento $(x, c) \in G_1 \oplus \mathbb{R}$ tal que
  $$x(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c.$$
  Interpretamos a x_i como el monto que demanda el i-ésimo acreedor.

  Todos los resultados de la sección anterior se aplican a los juegos de bancarrota.

Problema de bancarrota

- Recordemos que G_1 consiste de los juegos que sólo pueden tener valores difentes de cero en coaliciones de cardinalidad uno. Así, es natural identidarlo con $\mathbb{R}^n$: $x(\{i\}) = x_i$.
-

Definición

Un juego de bancarrota es un elemento $(x, c) \in G_1 \oplus \mathbb{R}$ tal que

$$x(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c.$$

Interpretamos a x_i como el monto que demanda el i-ésimo acreedor.

Todos los resultados de la sección anterior se aplican a los juegos de bancarrota.

Problema de bancarrota

- Recordemos que G_1 consiste de los juegos que sólo pueden tener valores difentes de cero en coaliciones de cardinalidad uno. Así, es natural identidarlo con $\mathbb{R}^n$: $x(\{i\}) = x_i$.

- Definición
Un juego de bancarrota es un elemento $(x, c) \in G_1 \oplus \mathbb{R}$ *tal que*

$$x(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c.$$

Interpretamos a x_i como el monto que demanda el i-ésimo acreedor.

Todos los resultados de la sección anterior se aplican a los juegos de bancarrota.

Problema de bancarrota

- Hay un espacio de dimensión 3 de las soluciones lineales simétricas $\phi : G_1 \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ para problemás de bancarrota. La expresión general para tales soluciones esta dada por

$$\phi_i(x, c) = \alpha c + \beta x_i + \gamma x(N), \quad i : 1, \ldots, n;$$

para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

- Eficiecia (es decir, $\phi(x, c) \cdot\ 1_n = c$) significa que el valor de todos los bienes remantes, c, se divide entre los acreedores. Hay un espacio unidimensional de soluciones lineales simétricas y eficientes dado por

$$\phi_i(x, c) = \frac{c}{n} + \lambda(x_i - \frac{x(N)}{n}), \quad i : 1, \ldots, n;$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Problema de bancarrota

- Hay un espacio de dimensión 3 de las soluciones lineales simétricas $\phi : G_1 \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ para problemás de bancarrota. La expresión general para tales soluciones esta dada por

$$\phi_i(x, c) = \alpha c + \beta x_i + \gamma x(N), \quad i : 1, \dots, n;$$

para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

- Eficiecia (es decir, $\phi(x, c) \cdot \ 1_n = c$) significa que el valor de todos los bienes remantes, c, se divide entre los acreedores. Hay un espacio unidimensional de soluciones lineales simétricas y eficientes dado por

$$\phi_i(x, c) = \frac{c}{n} + \lambda(x_i - \frac{x(N)}{n}), \quad i : 1, \dots, n;$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Problema de bancarrota

- Naturalidad (i.e., $\phi(x, x \cdot \, 1_n) = x$) es el axioma que dice que si el total de reclamaciones es igual al monto de recuperación entonces cada acreedor debe recibir lo que el reclama. Hay un espacio unidimensional de soluciones naturales, lineales y simétricas para el problema de bancarrota. Estas soluciones estan dadas por

$$\phi(x, c) = x + \frac{(1-\alpha)}{n}(c - x \cdot \, 1_n)\, 1_n$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraria.

-

Corollary

Exste una única solución al problema de bancarrota que es lineal, simétrica, eficiente y natural. Esta está dada por

$$\phi_i(x, c) = \frac{c}{n} + x_i - \frac{x(N)}{n}, \quad i : 1, \ldots, n.$$

Problema de bancarrota

- Naturalidad (i.e., $\phi(x, x \cdot\ 1_n) = x$) es el axioma que dice que si el total de reclamaciones es igual al monto de recuperación entonces cada acreedor debe recibir lo que el reclama. Hay un espacio unidimensional de soluciones naturales, lineales y simétricas para el problema de bancarrota. Estas soluciones estan dadas por

$$\phi(x, c) = x + \frac{(1-\alpha)}{n}(c - x \cdot\ 1_n)\ 1_n$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraria.

-

Corollary

Exste una única solución al problema de bancarrota que es lineal, simétrica, eficiente y natural. Esta está dada por

$$\phi_i(x, c) = \frac{c}{n} + x_i - \frac{x(N)}{n}, \quad i : 1, \ldots, n.$$

Problema de bancarrota

- Naturalidad (i.e., $\phi(x, x \cdot \ 1_n) = x$) es el axioma que dice que si el total de reclamaciones es igual al monto de recuperación entonces cada acreedor debe recibir lo que el reclama. Hay un espacio unidimensional de soluciones naturales, lineales y simétricas para el problema de bancarrota. Estas soluciones estan dadas por

$$\phi(x, c) = x + \frac{(1-\alpha)}{n}(c - x \cdot \ 1_n) \ 1_n$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraria.

- Corollary

Exste una única solución al problema de bancarrota que es lineal, simétrica, eficiente y natural. Esta está dada por

$$\phi_i(x, c) = \frac{c}{n} + x_i - \frac{x(N)}{n}, \quad i : 1, \dots, n.$$

Referencias

- Dubey P., Neyman A. and Weber R.J. (1981). "Value Theory without Efficiency", *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp. 122-128.

- Hernández-Lamoneda L., Juárez-García R. and Sánchez-Sánchez F. "Dissection of cooperative solutions in game theory using representation techniques", Int. J. Game Theory **35** (2007), pp. 395-426.

- Ruiz, L.M., Valenciano, F. and Zarzuelo J.M. (1996) "The least Square Prenucleoulus and the Least Square Nucleolus. Two values for TU Games Based on the Excess Vector", *International Journal of Game Theory*,Vol. 25, pp. 113-134.

- Saari D.G. and Sieberg K.K. (2001). "Some Surprising Properties of Power Indices", *Games and Economic Behavior*, vol. 36, 2, pp. 241-263.